Lezione4 c2

mercoledì 11 marzo 2026 15:51

Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{1}{2n+3} \; : \; \underline{n \in \mathbb{N}} \right\}$$

Cerco maggioranti - Noto che gli elementi di A sono numeri positivi

Cerco maggioranti $\boxed{x > 0}$

$$\boxed{\frac{1}{2n+3} \le x} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$$

essendo ambo i membri positivi, passo ai reciproci

$$(P_n) \quad 2n+3 \ge \frac{1}{x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2n \ge \frac{1}{x} - 3$$

$$n \geq \frac{\frac{1}{x} - 3}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \qquad 0 \geq \frac{\frac{1}{x} - 3}{2}$$

$$0 \geq \frac{1}{x} - 3$$

$$3 \geq \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \leq x}$$

$$\Rightarrow \quad A^* = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{3} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \sup A = \min A^* = \frac{1}{3}$$

Verifico se $\frac{1}{3}$ è anche $\max A$ (?)

$\frac{1}{3} \in A$? $\iff$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{2n+3}$

per qualche $n \in \mathbb{N}$?

OK per $n=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \max A$$

Cerco minoranti per A

Dall'osservazione iniziale $0 \in A$ ✗

Cerco minoranti $y>0$ (se ci sono!)

$$y \le \frac{1}{2n+3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

essendo ambo i membri positivi, passo ai reciproci:

$$\frac{1}{y} \ge 2n+3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{y} - 3 \ge 2n$$

$$\frac{\frac{1}{y} - 3}{2} \ge n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ 1ª conseguenza di Archimede, $\mathbb{N}$ non può essere limitato superiormente

$$\xcancel{=}$$

$\Rightarrow$ Non ci sono minoranti $y>0$

$\Rightarrow$ $\inf A = \max A_* = 0$

Inoltre $\boxed{0 \notin A}$ (ossia 0 non può essere $\min A$)

Infatti $0 = \frac{1}{2n+3} \iff 0 = 1$ $\boxed{\text{NO}}$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Notiamo che gli elementi di A sono numeri positivi

Cerco maggioranti $\boxed{y>0}$ per A

(P_x) $\boxed{\frac{1}{1+x^2} \le y}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

entrambi i numeri positivi, passo ai reciproci

$$1+x^2 \ge \frac{1}{y}$$

(P_x) $\boxed{x^2+\left(1-\frac{1}{y}\right) \ge 0}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$

$$\Delta = -4\left(1-\frac{1}{y}\right)$$

$\Delta \ge 0$ otterrei valori esterni alle radici (che non coincide con $\mathbb{R}$)

$\boxed{\Delta < 0}$ $Sol = \mathbb{R}$

Le soluzioni di (P_x) coincidono con $\mathbb{R}$
(imposizione) $\iff \Delta < 0$

ossia $$-4\left(1-\frac{1}{y}\right)<0$$

$$\iff \quad 1-\frac{1}{y}>0$$

$$1>\frac{1}{y}$$

$$\iff \quad \boxed{1<y}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sup A = \min A^{*} = 1}$$

$1 = \max A$? $\iff$ $1 \in A$?

$\iff \quad 1 = \dfrac{1}{1+x^2}$ per qualche $x\in\mathbb{R}$?

OK $\quad x=0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1=\max A}$$

Dall'osservazione iniziale sappiamo già

$0 \in A_{*}$

Cerco minoranti $\boxed{y>0}$

$$y \le \frac{1}{1+x^2} \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\frac{1}{y} \ge 1+x^2$$

imposizione

$$(P_x) \quad x^2 + \left(1 - \frac{1}{y}\right) \le 0 \qquad \boxed{Sol = \mathbb{R}}$$

Le soluzioni (P_x) non possono mai coincidere con tutto $\mathbb{R}$ ⨳

$\Rightarrow$ $y>0$ non può essere minorante per A

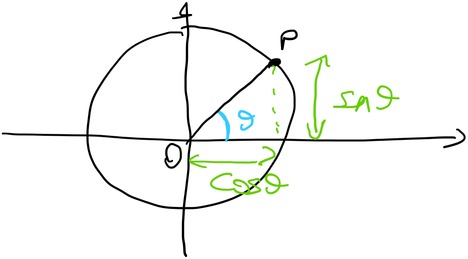
$$\Rightarrow \boxed{\inf A = \max A_* = 0}$$

essendo $0 \ne \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 0 non può essere min A

Cenni di Trigonometria

Considero C la circonferenza unitaria (di raggio $=1$) centrata nell'origine



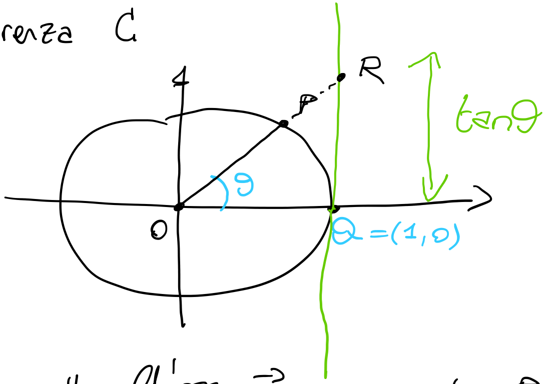
Fissato un angolo θ (rispetto all'asse $\vec{x}$) e considero il segmento OP (con $P \in C$) tale che $\overline{OP}$ forma un angolo θ con $\vec{x}$

si definisce $\sin\theta \in \mathbb{R}$ come l'altezza di P

si definisce $\cos\theta \in \mathbb{R}$ come la base di P

Per la tangente, considero la medesima

circonferenza C



Fisso θ rispetto all'asse $\vec{x}$ e considero $P \in C$ tale che il segmento $\overline{OP}$ forma angolo θ risp. $\vec{x}$

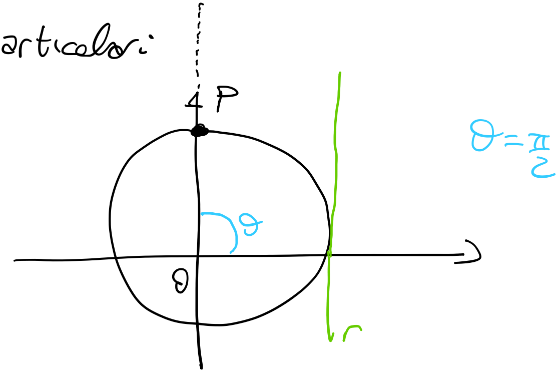
considero r la retta tangente alla circonf. nel punto $Q=(1,0)$ - e sia R il punto di contatto tra r ed il prolungamento del segmento OP

si definisce $\tan\theta \in \mathbb{R}$ come l'altezza di R

si prova che

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

Casi particolari:



Nei casi $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(casi polo sud + polo Nord)

la $\tan\theta$ perde di significato

ossia, l'operazione $\tan\theta$ ha un campo di esistenza:

$$\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dalla definizione, osserviamo

$$\sin\theta = \sin(\theta + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan\vartheta = \tan(\vartheta + k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Per tal motivo diremo che le funzioni $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, $\tan\vartheta$ sono periodiche -

Topologia in $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Def (interno) un punto $x_0 \in A$ si dice interno ad A se $\exists r > 0$

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$$

Sia $\mathring{A} = \{$ punti interni ad $A \}$

e lo chiamiamo interno di A

Ovviamente $\mathring{A} \subseteq A$ -

Def (chiusura)

$\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$ si dice di chiusura per A se

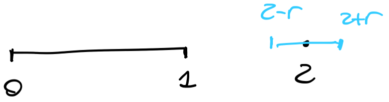
$$\forall r>0 \qquad]x_0-r, x_0+r[\cap A \neq \emptyset$$

Definiamo $\overline{A} = \{\text{punti di chiusura di } A\}$

Osservo che $\quad A \subseteq \overline{A}$

Esempio

$$A = [0,1] \cup \{2\}$$



$]2-r, 2+r[\cap A$ sicuramente cade 2

se $r>0$ è piccolo ci cade solo il 2

$$\Rightarrow \quad]2-r, 2+r[\cap A = \{2\}$$

Def (Accumulazione)

$\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$ si dice di accumulazione per A

se $\forall r>0 \quad \left( ]x_0-r, x_0+r[\setminus \{x_0\} \right) \cap A \neq \emptyset$

ossia $]x_0-r, x_0+r[$ deve toccare A in almeno un punto diverso da x_0

$$DA = \{ \text{punti di accumulazione per } A \}$$

Proposizione

$x_0 \in DA \iff \forall r>0 \ ]x_0-r, x_0+r[\cap A$ è infinito

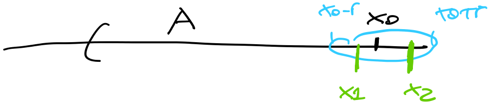
Dim ($\Leftarrow$) Banale

($\Rightarrow$) (Ip) x_0 è di accumulaz per A

(Ts) $]x_0-r, x_0+r[\cap A$ è infinito

Per Assurdo, Nego la tesi

$\boxed{\exists\, r>0}$ $]x_0-r, x_0+r[\, \cap A = \{x_1, \dots, x_p\}$



Sia $m_i = |x_0 - x_i|$ $\quad i=1,2,\dots,p$

e sia $\bar{r} = \min\{m_i : i=1,2,\dots,p\}$

Noto che $]x_0-\bar{r}, x_0+\bar{r}[\, \cap A$

nessuno dei punti $x_1, \dots, x_p$ ci cade in questa intersezione

$\Rightarrow$ $]x_0-\bar{r}, x_0+\bar{r}[\, \cap A$ al più ci può cadere il punto x_0

Assurdo poiché $x_0 \in DA$

Def (Frontiera)

$x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di frontiera per A se

$\forall r>0 \qquad]x_0-r, x_0+r[\cap A \neq \emptyset$

$]x_0-r, x_0+r[\cap (\mathbb{R}\setminus A) \neq \emptyset$

Def Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se $A = \mathring{A}$

A si dice chiuso se $A = \overline{A}$

Teorema
A è aperto $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}\setminus A$ è chiuso

Prop

A è chiuso $\Longleftrightarrow$ $DA \subseteq A$

$\Longleftrightarrow$ $FA \subseteq A$

Limiti di Funzioni

Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

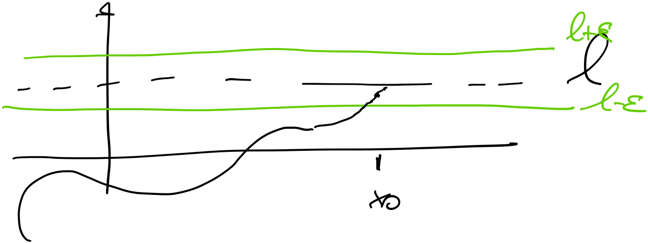
e $x_0 \in DA$

① Diremo che $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A$ con $x \in \left] x_0 - \delta, x_0 + \delta \right[$

$\Longrightarrow f(x) \in \left] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \right[$

$\Longleftrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



② Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

se

$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A$ con $x \in \left] x_0 - \delta, x_0 + \delta \right[$

$\Longrightarrow f(x) > K$

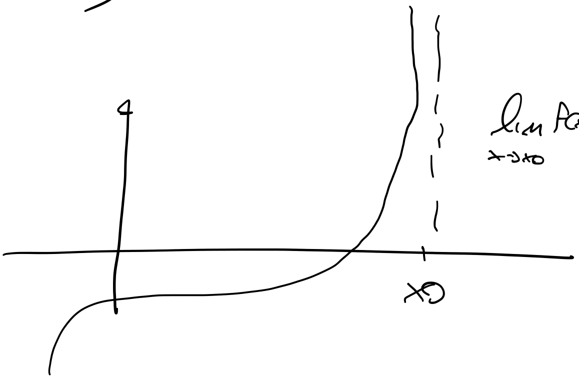
In tal caso diremo che f(x) diverge positiv.

③ Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall K > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ con $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\Rightarrow f(x) < -K$

Es



$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

④ Se A non è limitato

Diremo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 :$ se $x \in A$ con $x > r$

$\Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

⑤ Diremo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$: se $x \in A$ con $x < -r$

$\Rightarrow f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

Analogamante si ottengono le definizioni

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Operazioni Algebriche

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in DA$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

① $\overset{\text{somma}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$

② $\overset{\text{diff.}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$

③ $\overset{\text{Prod.}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$

④ $\overset{\text{rapporto}}{\Longrightarrow}$ se $\boxed{l_2 \neq 0}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

Attenzione se l_1 e l_2 non sono numeri reali, ossia $l_1, l_2 = \pm\infty$

Allora non posso dedurre il limite dalle operazioni

Es se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \,?$$

In tal caso parleremo di **forma indeterminata**

Es $f(x) = x$

$g(x) = -x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x-x) = 0$$

Elenchiamo le varie forme indeterminate

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

$$0^0, \quad 1^\infty$$

Teorema (unicità)

$$\text{se} \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow l_1 = l_2$$

Se il limite esiste esso è unico!

Teorema (Permanenza del segno)

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 0$

$$\Rightarrow \exists\, \delta>0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[^{-}, \; x \in A$$

Nota $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Infatti, $x \to +\infty \Rightarrow$

$\forall K > 0 \quad x > K$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{K}$ piccolo $= \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

studiamo $\lim_{x\to+\infty} P(x)$ con

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

Se studio ciascun monomio

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots\ x}_{n\text{-volte}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

Quindi in $P(x)$ abbiamo somme di quantità che tendono a $+$ opp. $-\infty$

Ma

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\cancel{x^{n-1}}}{\cancel{x^n}} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{a_n x^n} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x}}} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x^2}}} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \underset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x^n}}} \right]$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$